数理解析研究所講究録 1474 巻 2006 年 11-18

2階準線形楕円型方程式系の large solution について

広島大学・総合科学部　宇佐美 広介 (Hiroyuki Usami)
Faculty of Integrated Arts and Sciences,
Hiroshima University
尾道大学・経済情報学部　寺本 智光 (Tomomitsu Teramoto)
Faculty of Economics, Management & Information Science,
Onomichi University

1. 序・主結果

次の2階準線形楕円型方程式系の球対称な positive large solution の存在について考察する.

$$(1.1)\qquad \begin{cases} \Delta_p u = H(|x|)v^{\alpha}, \\ \Delta_q v = K(|x|)u^{\beta}, \end{cases} \quad x \in \boldsymbol{R}^N,$$

ここで, $\Delta_m \cdot = \operatorname{div}(|D\cdot|^{m-2}D\cdot)$, $1 < p < N$, $1 < q < N$, $\alpha, \beta > 0$, は定数で $\alpha\beta > (p-1)(q-1)$ を満たすとする. $H(r) > 0$, $K(r) > 0, r = |x|$ は $[0, \infty)$ で連続で次の条件を満たすとする:

$$(1.2)\qquad \begin{aligned} &\int^{\infty} \left(s^{1-N} \int_0^s t^{N-1} H(t)dt \right)^{\frac{1}{p-1}} ds < \infty, \\ &\int^{\infty} \left(s^{1-N} \int_0^s t^{N-1} K(t)dt \right)^{\frac{1}{q-1}} ds < \infty. \end{aligned}$$

定義　(u, v) が (1.1) の全域解であるとは, $u, v, |Du|^{p-2}Du, |Dv|^{q-2}Dv \in C^1(\boldsymbol{R}^N)$ で, $\boldsymbol{R}^N$ で (1.1) を満たすときをいう.

定義　(u, v) が (1.1) の large solution であるとは, (u, v) が (1.1) の全域解で

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = \infty, \quad \lim_{|x|\to\infty} v(x) = \infty$$

を満たすときをいう. (u, v) が (1.1) の small solution であるとは, (u, v) が (1.1) の全域解で

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = \text{const} > 0, \quad \lim_{|x|\to\infty} v(x) = \text{const} > 0$$

を満たすときをいう.

方程式系 (1.1) の球対称な正値全域解の存在については次のことが知られている (文献 [3]).

Theorem A　H, K が (1.2) を満たすとする. このとき (1.1) の球対称な positive small solution が存在する.

H, K が条件 (1.2) を満たしていない場合, 球対称な正値全域解の存在について次のことが知られている (文献 [2]).

Theoerm B H, K が

$$C_1 r^{-\lambda} \le H(r) \le C_2 r^{-\lambda}, \quad C_3 r^{-\mu} \le K(r) \le C_4 r^{-\mu}, \ r \ge r_0 > 0$$

を満たすとする, ただし $C_i > 0,\ i = 1, \cdots, 4,$ は定数, λ, μ は

$$\lambda - p + \frac{\alpha(\mu - q)}{q-1} > 0, \quad \mu - q + \frac{\beta(\lambda - p)}{p-1} > 0$$

を満たす定数. このとき, (1.1) の球対称な正値全域解が存在し, (u, v) は

$$u(r) \le C r^{\frac{(\lambda-p)(q-1)+\alpha(\mu-q)}{\alpha\beta-(p-1)(q-1)}}, \quad v(r) \le C r^{\frac{(\mu-q)(p-1)+\beta(\lambda-p)}{\alpha\beta-(p-1)(q-1)}}, \quad r \ge r_1 > 0$$

を満たす.

注意 Theorem B において, $\lambda > p,\ \mu > q$ のとき, H, K は条件 (1.2) を満たす.

Theorem B より, 条件 (1.2) の下で, 球対称な positive large solution が存在する可能性がある. (条件 (1.2) の下では, (1.1) の球対称な正値全域解は small か large のどちらかになる). よって次の問題が考えられる.

問題 (i) 条件 (1.2) の下で, (1.1) の球対称な positive large solution が存在するか?
(ii) large solution が存在する場合、解が large になるための条件は?

$p = q = 2$ で, $\alpha > 1, \beta > 1$ の場合, 球対称な positive large solution が存在することが知られている (文献 [1]). そこでは, 初期値 $(u(0), v(0))$ がある条件を満たせば解が large になることを示している.

この研究の目的は, 文献 [1] の結果を方程式系 (1.1) に拡張することである。さらに, 文献 [1] の $\alpha > 1,\ \beta > 1$ という条件を $\alpha\beta > 1$, に弱めることを目的とする.

定義 集合 G を次で定義する.

$$G = \{(a, b) \in [0, \infty)^2; u(0) = a, v(0) = b, \text{となる } (u, v) \text{ は } (1.1) \text{ の非負値全域解}\}.$$

この集合 G は次の性質をもつ.

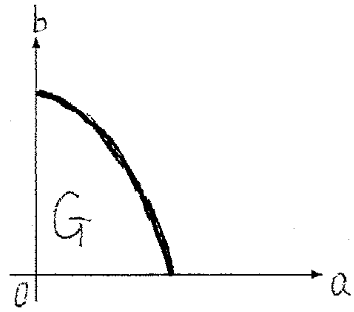
Lemma 1 $(a, b) \in G$ ならば $[0, a] \times [0, b] \subset G$.

Lemma 2 G は連結な有界閉集合.

(注) $p = q = 2,\ \alpha > 1,\ \beta > 1$ のとき G は凸集合.

(1.1) の large solution の存在について次の結果が得られた:

Theorem $(a, b) \in \partial G$ かつ $a > 0, b > 0$ とする。このとき $(u(0), v(0)) = (a, b)$ となる (1.1) の球対称な正値全域解 (u, v) は large である. (右図)



2. 証明の概略

<u>Lemma 1 の証明の概略</u>　$(a,b) \in G,\ 0 \le \tilde{a} \le a,\ 0 \le \tilde{b} \le b$ として, $\{u_k\}, \{v_k\}$ を次のように定義する.

$$
\begin{aligned}
u_k(r) &= \tilde{a} + \int_0^r \left(s^{1-N} \int_0^s t^{N-1} H(t) v_{k-1}(t)^\alpha dt \right)^{\frac{1}{p-1}} ds, \quad r \ge 0,\ k \ge 1, \\
v_k(r) &= \tilde{b} + \int_0^r \left(s^{1-N} \int_0^s t^{N-1} K(t) u_k(t)^\beta dt \right)^{\frac{1}{q-1}} ds, \quad r \ge 0,\ k \ge 1, \\
v_0(r) &= \tilde{b}, \quad r \ge 0.
\end{aligned}
$$

(U,V) を $(U(0),V(0)) = (a,b)$ となる (1.1) の非負値全域解とする. 明らかに $v_0 \le v_1$ が成立. これより $u_1 \le u_2$ が成立. 同様にして $v_1 \le v_2$ が成立する. また, $v_0(r) \le V(r)$ より

$$
\begin{aligned}
u_1(r) = &\ \tilde{a} + \int_0^r \left(s^{1-N} \int_0^s t^{N-1} H(t) v_0(t)^\alpha dt \right)^{\frac{1}{p-1}} ds \\
\le &\ a + \int_0^r \left(s^{1-N} \int_0^s t^{N-1} H(t) V(t)^\alpha dt \right)^{\frac{1}{p-1}} ds \\
= &\ U(r)
\end{aligned}
$$

が成立する. 同様にして

$$
\begin{aligned}
v_1(r) = &\ \tilde{b} + \int_0^r \left(s^{1-N} \int_0^s t^{N-1} K(t) u_1(t)^\beta dt \right)^{\frac{1}{q-1}} ds \\
\le &\ b + \int_0^r \left(s^{1-N} \int_0^s t^{N-1} K(t) U(t)^\beta dt \right)^{\frac{1}{q-1}} ds \\
= &\ V(r)
\end{aligned}
$$

が成立する. 以下同じことを繰り返して, 次が成立 :

$$
\begin{aligned}
u_k(r) \le u_{k+1}(r) \le U(r), &\quad r \in [0,\infty),\ k \ge 1, \\
v_k(r) \le v_{k+1}(r) \le V(r), &\quad r \in [0,\infty),\ k \ge 1.
\end{aligned}
$$

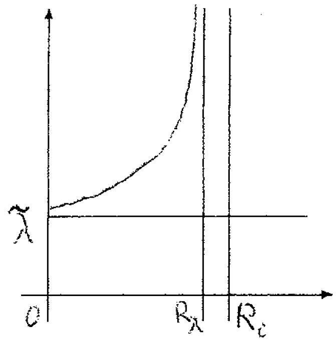
$(u,v) = \lim_{k\to\infty}(u_k, v_k)$ とおくと, $[0,\infty)$ で $u(r) \le U(r),\ v(r) \le V(r)$ が成立し, (u,v) は $(u(0),v(0)) = (\tilde{a},\tilde{b})$ となる (1.1) の非負値全域解になる. よって $(\tilde{a},\tilde{b}) \in G$. (証明終)

Lemma 2 の証明の概略.

<u>有界</u>　G が有界であることを示すために、まず次の方程式系を考える.

$$
\begin{cases} \Delta_p \bar{u} = C_1 \bar{v}^\alpha, \\ \Delta_q \bar{v} = C_2 \bar{u}^\beta. \end{cases} \tag{2.1}
$$

ここで $C_1 > 0, C_2 > 0$ は定数. 文献 [2] から (2.1) の非負値全域解は $(0,0)$ だけである ((2.1) の非自明な非負値解は必ず有限時刻で blow up する). (2.1) に対して次の Lemma が成立する.



Lemma 3 $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, $R_0 > 0$ を任意の定数とする．このとき，次のような $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(C_1, C_2, R_0)$ が存在する．

$(u(0), v(0)) = (\lambda, 0)$, $\lambda \geq \tilde{\lambda}$, となる (2.1) の球対称な非負値解 (u, v) は R_0 の手前で blow up する，すなわち，$\exists R_\lambda (< R_0)$ s.t.

$$\lim_{r \nearrow R_\lambda} u(r) = \lim_{r \nearrow R_\lambda} v(r) = \infty.$$

有界性の証明． G は非有界とする．Lemma 1 より $(a, b) \in G$ ならば $[0, a] \times [0, b] \subset G$ だから $[0, \infty) \times \{0\} \subset G$ または $\{0\} \times [0, \infty) \subset G$ である．$[0, \infty) \times \{0\} \subset G$ とする．定数 $R_* > 0$ を任意にとり，H_*, K_* を

$$H_* = \min_{0 \leq r \leq R_*} H(r) > 0, \quad K_* = \min_{0 \leq r \leq R_*} K(r) > 0$$

とおく．このとき Lemma 3 より，次のような λ_* が存在する．(u_*, v_*) は，方程式系

$$\begin{cases} \Delta_p u_* = H_* v_*^\alpha, & u_*(0) = \lambda \geq \lambda_*, \\ \Delta_q v_* = K_* u_*^\beta, & v_*(0) = 0, \\ u_*'(0) = v_*'(0) = 0, \end{cases}$$

の球対称な非負値解で，(u_*, v_*) は R_* の手前で blow up する，すなわち

$$\lim_{r \nearrow R_\lambda} u_*(r) = \lim_{r \nearrow R_\lambda} v_*(r) = 0, \quad 0 < \exists R_\lambda < R_*$$

(u, v) を $u(0) > \lambda$, $v(0) = 0$ となる (1.1) の球対称な非負値全域解とする．このとき

$$H(r) \geq H_*, \quad K(r) \geq K_*, \quad 0 \leq r \leq R_\lambda$$
$$u(0) > u_*(0), \ v(0) = v_*(0)$$

だから

$$u(r) > u_*(r), \quad v(r) > v_*(r), \quad 0 < r \leq R_\lambda$$

が成立する．(u, v) は全域解だから

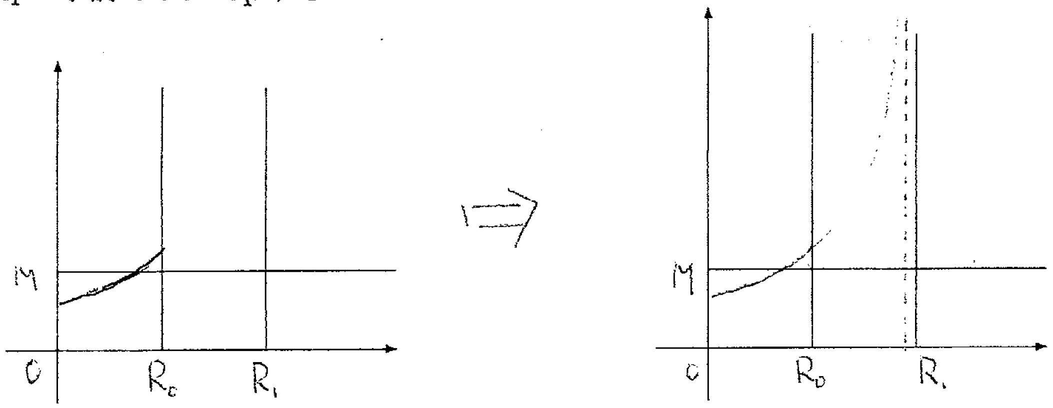
$$\infty = \lim_{r \to R_*} u_*(r) \leq u(R_*) < \infty$$

となり矛盾．よって G は有界集合である

閉集合 次の Lemma を用いる．

Lemma 4 任意の R_0, R_1 $(0 < R_0 < R_1)$ に対して次のような数 $M = M(R_0, R_1) > 0$ が存在する．

(1.1) の $|x| = r \in [0, R_0]$ 上の球対称解 $(u(r), v(r))$ が $v(R_0) \geq M$ を満たすならば (u, v) は R_1 の手前で blow up する.



<u>閉集合の証明</u>　$(u(r; a, b), v(r; a, b))$ を $(u(0), v(0)) = (a, b)$ となる (1.1) の球対称解とする. $\{(a_n, b_n)\} \subset G$ を $\lim_{n\to\infty}(a_n, b_n) = (\bar{a}, \bar{b}) \in [0, \infty) \times [0, \infty)$ なる点列とする. G は閉集合でないとする $((\bar{a}, \bar{b}) \notin G)$. $(\bar{a}, \bar{b}) \notin G$ だから 次をみたす $\bar{R}$ が存在する:

$$\lim_{r\nearrow\bar{R}} u(r; \bar{a}, \bar{b}) = \lim_{r\nearrow\bar{R}} v(r; \bar{a}, \bar{b}) = \infty. \tag{2.2}$$

$R_1 \in (\bar{R}, \infty)$ をひとつ固定する. Lemma 4 より 次のような数 $M = M(\bar{R}, R_1)$ が存在する.

$[0, \bar{R}]$ 上の (1.1) の球対称解 (u, v) が $v(\bar{R}) > M$ をみたせば (u, v) は R_1 の手前で blow up する.(右図 1)

(2.2) より 次をみたす $R_0 \in (0, \bar{R})$ が存在する:

$$v(R_0; \bar{a}, \bar{b}) > M.$$

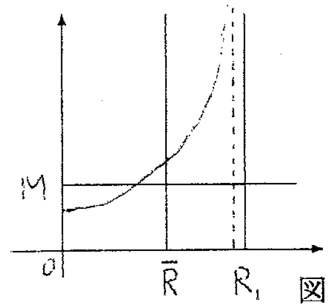


図 1

初期値に対する連続性より $|(a, b) - (\bar{a}, \bar{b})| < \delta$ をみたす $\delta > 0$ が存在すれば $(u(r; a, b), v(r; a, b))$ は $[0, R_0]$ 上存在して, $v(R_0; a, b) > M$ をみたす. よって M の定義から $(u(r; a, b), v(r; a, b))$ は R_1 の手前で必ず blow up する.(右図 2)

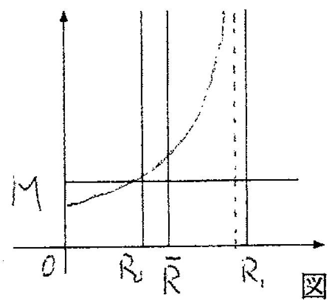


図 2

$\lim_{n\to\infty}(a_n, b_n) = (\bar{a}, \bar{b})$ だから $n \in \boldsymbol{N}$ が十分大きいと $|(a_n, b_n) - (\bar{a}, \bar{b})| < \delta$ を満たす $\delta > 0$ は存在する. よって $v(r; a_n, b_n)$ は R_1 の手前で blow up する. 一方 $(a_n, b_n) \in G$ だから $(u(r; a_n, b_n), v(r; a_n, b_n))$ は全域解となり矛盾. よって G は閉集合. (証明終)

<u>**Theorem の証明の概略**</u>　$(a, b) \in \partial G$, $a > 0$, $b > 0$ とする. Lemma 2 より, G は閉集合だから $(a, b) \in G$. (U, V) を $(U(0), V(0)) = (a, b)$ となる (1.1) の球対称な正値全域解とする. $n \geq 1$ に対して $(a + 1/n, b + 1/n) \notin G$. (U_n, V_n) を $(U_n(0), V_n(0)) = (a + 1/n, b + 1/n)$

なる (1.1) の球対称な正値解とすると, (U_n, V_n) は次を満たす:

$$U_n(r) = a + \frac{1}{n} + \int_0^r s^{1-N}\left(\int_0^s t^{N-1}H(t)V_n(t)^\alpha dt\right)^{\frac{1}{p-1}} ds,\ r \in [0, R_n), \tag{2.3}$$

$$V_n(r) = b + \frac{1}{n} + \int_0^r s^{1-N}\left(\int_0^s t^{N-1}K(t)U_n(t)^\beta dt\right)^{\frac{1}{q-1}} ds,\ r \in [0, R_n), \tag{2.4}$$

ここで R_n は

$$\lim_{r\nearrow R_n} U_n(r) = \lim_{r\nearrow R_n} V_n(r) = \infty, \quad n \geq 1.$$

となるものである. このとき $R_n \leq R_{n+1}$ が成立. 実際, u_k, v_k を次のように定義する:

$$\begin{aligned} u_k(r) &= a + \frac{1}{n+1} + \int_0^r \left(s^{1-N}\int_0^s t^{N-1}H(t)v_{k-1}(t)^\alpha\right)^{\frac{1}{p-1}} ds, \\ v_k(r) &= b + \frac{1}{n+1} + \int_0^r \left(s^{1-N}\int_0^s t^{N-1}K(t)u_k(t)^\eta\right)^{\frac{1}{q-1}} ds, \\ v_0(r) &= b + \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Lemma 1 の証明と同様にして

$$\begin{array}{l} u_k(r) \leq u_{k+1}(r) \leq U_n(r), \\ v_k(r) \leq v_{k+1}(r) \leq V_n(r), \end{array} \quad r \in [0, R_n), \quad k \geq 1 \tag{2.5}$$

が成立する. 従って $\lim_{k\to\infty}(u_k, v_k)$ が存在し, $(U_{n+1}, V_{n+1}) = \lim_{k\to\infty}(u_k, v_k)$ は $(U_{n+1}(0), V_{n+1}(0)) = (a + 1/(n+1), b + 1/(n+1))$ となる (1.1) の $[0, R_n)$ 上の球対称な正値解となる. R_{n+1} の定義から $R_{n+1} \geq R_n$.

$R = \lim_{n\to\infty} R_n$ とおく. $0 \leq \forall r < R$ とする. (2.5) より

$$U_{n+1}(r) \leq U_n(r), \quad V_{n+1}(r) \leq V_n(r), \quad r \in [0, R_n)$$

が成立する. よって $\lim_{n\to\infty}(U_n, V_n)$ が存在し

$$U(r) = \lim_{n\to\infty} U_n(r), \quad V(r) = \lim_{n\to\infty} V_n(r), \quad r \in [0, R) \tag{2.6}$$

は $(U(0), V(0)) = (a, b)$ を満たす (1.1) の球対称な正値解となる.

$R < \infty$ とする. $U_n'(r) \geq 0$ だから (2.4) より

$$\begin{aligned} V_n(r) \leq&\ b + \frac{1}{n} + U_n(r)^{\frac{\beta}{q-1}} \int_0^\infty \left(s^{1-N}\int_0^s t^{N-1}K(t)dt\right)^{\frac{1}{q-1}} ds \\ \leq&\ C_1 + C_2 U_n(r)^{\frac{\beta}{q-1}} \end{aligned}$$

が成立する, ここで $C_1 = b + 1, C_2 = \int_0^\infty (s^{1-N}\int_0^s t^{N-1}K(t)dt)^{1/(q-1)} ds$.

$f(t)=(C_1+C_2t^{\frac{\beta}{q-1}})^\alpha$ と定義する．$\alpha\beta>(p-1)(q-1)$ だから Γ を

$$\Gamma(s)=\int_s^\infty \frac{dt}{f(t)^{\frac{1}{p-1}}},\quad s>0$$

とおく．このとき

$$\Gamma'(s)=-f(s)^{-\frac{1}{p-1}}<0,\quad \Gamma''(s)=\frac{1}{p-1}f(s)^{-\frac{p}{p-1}}f'(s)>0.$$

U_n は (1.1) の正値解だから

$$\begin{aligned}\Delta_p U_n =&\ H(|x|)V_n^\alpha\\ \le&\ H(|x|)(C_1+C_2U_n^{\frac{\beta}{q-1}})^\alpha\\ =&\ H(|x|)f(U_n),\quad r\in[0,R_n)\end{aligned}$$

が成立する．また

$$\begin{aligned}\Delta_p\Gamma(U_n)=&\ -|\Gamma'(U_n)|^{p-1}\Delta_pU_n+(p-1)|\Gamma'(U_n)|^{p-2}\Gamma''(U_n)|\nabla U_n|^p\\ \ge&\ \frac{-1}{f(U_n)}H(|x|)f(U_n)=-H(r),\quad r\in[0,R_n)\end{aligned}$$

が成立する．上式を書き換えて

$$\frac{d}{dr}\left(r^{N-1}\left|\frac{d}{dr}\Gamma(U_n)\right|^{p-2}\frac{d}{dr}\Gamma(U_n)\right)\ge -r^{N-1}H(r),\quad r\in(0,R_n) \tag{2.7}$$

となる．(2.7) を 2 回積分して $([0,r],[r,R_n])$

$$\Gamma(U_n(r))\le\int_r^{R_n}\left(s^{1-N}\int_0^s t^{N-1}H(t)dt\right)^{\frac{1}{p-1}}ds,\quad r\in[0,R_n)$$

を得る．$n\to\infty$ とすると，(2.6) より

$$\Gamma(U(r))\le\int_r^{R}\left(s^{1-N}\int_0^s t^{N-1}H(t)dt\right)^{\frac{1}{p-1}}ds,\quad r\in[0,R)$$

を得る．Γ は減少関数で逆関数をもつから

$$U(r)\ge\Gamma^{-1}\left(\int_r^{R}\left(s^{1-N}\int_0^s t^{N-1}H(t)dt\right)^{\frac{1}{p-1}}ds\right),\quad r\in[0,R)$$

となる．上式で $r\to R$ とすると，$\Gamma^{-1}(s)\to\infty(s\to 0)$ より

$$\lim_{r\to R}U(r)\ge\lim_{r\to R}\Gamma^{-1}\left(\int_r^{R}\left(s^{1-N}\int_0^s t^{N-1}H(t)dt\right)^{\frac{1}{p-1}}ds\right)=\infty.$$

従って, $U(r)$ は R で blow up する. これは (U,V) が全域解であることに矛盾する. 従って, $\lim_{n\to\infty} R_n = R = \infty$ である. よって $\lim_{r\to\infty} U(r) = \infty$. また (2.3) より

$$U(r) \leq a + V(r)^{\frac{\alpha}{p-1}} \int_0^\infty \left(s^{1-N} \int_0^s t^{N-1} H(t) dt \right)^{\frac{1}{p-1}} ds, \quad r \geq 0$$

が成立. これから明らかに $\lim_{r\to\infty} V(r) = \infty$. よって (U,V) は large solution になる.

参考文献

[1] A. V. Lair and A. W. Shaker, Existence of entire large positive poslutions of semilinear elliptic systems, J. Diff. Eq, 164(2000), 380-394.

[2] T. Teramoto, On nonnegative entire solutions of second order quasilinear elliptic systems, Electron. J. Qualtive Theory Diff. Eq., No 16(2002).

[3] T. Teramoto, On positive radial entire solutions of second order quasilinear elliptic systems, J. Math. Anal. Appl, 282(2003), 531-552.